Chapitre n°5 : Arithmétique et simplification de fractions

Objectifs	NE	MI	CA	MS	TM
Je sais résoudre un problème à l'aide d'une division euclidienne.					
Je sais trouver si un nombre entier est divisible par un autre (division euclidienne et critères de divisibilité par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 9 ; 10).					
Je sais décomposer un nombre en un produit de facteurs premiers.					
Je sais simplifier une fraction.					

I. Division euclidienne, multiple et diviseur

Activité n°1

Une marguerite comprend 89 pétales. Un enfant répète en boucle la comptine des degrés d'amour en effeuillant la marguerite : « un peu, beaucoup, énormément, à la folie, pas du tout ».

Comment est-il aimé ?

Bilan

Posons la division euclidienne de l'activité n°1 :

$$\begin{array}{r|l} 89 & 5 \\ \cline{2-2} & 17 \\ 39 & \\ & \\ 4 & \end{array}$$

Écriture en ligne de la division euclidienne : $89 = 5 \times 17 + 4$

89 est le dividende, il correspond au nombre de pétales total.

5 est le diviseur, il correspond au nombre de degré d'amour.

17 est le quotient, il correspond au nombre de comptines entières que l'enfant a récitées.

4 est le reste, il correspond au nombre de degrés d'amour de la comptine incomplète (la dernière).

Remarque : Le reste d'une division euclidienne est toujours inférieur au diviseur. Le nombre de degrés d'amour de notre comptine incomplète (reste) ne peut pas être plus grand que le nombre de degrés d'amour d'une comptine complète (diviseur).

Cas particuliers :

Effectue la division euclidienne suivante : 144 : 9.

$$144 = 9 \times 16 + 0$$

Le reste de la division euclidienne de 144 par 9 est 0.

Dans ce cas, on dit que 9 est un diviseur du nombre 144 ou encore que 144 est un multiple de 0.

Définition : Les lettres a et b désignent des nombres entiers. a est **un diviseur** de b si le reste de la division euclidienne de b par a est égal à 0 (nul).

Remarque : On dit aussi que b est **un multiple** de a.

Exemples :

6 est-il un diviseur du nombre 372 ? $372 = 6 \times 62 + 0$. Donc 6 est un diviseur de 372.

131 est-il un multiple de 6 ? $131 = 6 \times 21 + 5$. Donc 6 n'est pas un diviseur de 131.

14 est-il un diviseur de 14 ? $14 = 14 \times 1 + 0$. Donc 14 est un diviseur de 14.

Rappels : Critères de divisibilité – *Ces propriétés sont admises et seront justifiées plus tard.*

- **Critère de divisibilité par 2 :** Un nombre est divisible par 2 (on dit aussi « pair) si son chiffre des unités est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- **Critère de divisibilité par 10 :** Un nombre entier est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.
- **Critère de divisibilité par 5 :** Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- **Critère de divisibilité par 3 :** Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- **Critère de divisibilité par 9 :** Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- **Critère de divisibilité par 4 :** Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par son chiffre des dizaines et son chiffre des unités est divisible par 4.

Exemples

3 345 est-il divisible par…	Justification
2	3 345 impair donc il n'est pas divisible par 2.
3	3+3+4+5=15. 15 est divisible par 3, donc 3 345 est divisible par 3.
4	45 n'est pas divisible par 4, donc 3 345 n'est pas divisible par 4.
5	Le chiffre des unités de 3 345 est 5, donc 3 345 est un multiple de 5.
9	3+3+4+5=15. 15 n'est pas divisible par 9, donc 3 345 n'est pas divisible par 9.
10	3 345 n'a pas 0 pour chiffre des unités, donc 3 345 n'est pas divisible par 5.

Justification du critère de divisibilité par 10 sur un exemple

Explique pourquoi le critère de divisibilité par 10 est vrai. Tu pourras utiliser un ou plusieurs exemples pour expliquer.

Prenons un nombre entier qui se termine par le chiffre 0. Par exemple 38 940.

Décomposons-le en un produit de deux facteurs : $38\,940 = 3\,894 \times 10$.

Cette décomposition est la division euclidienne écrite en ligne de 38 940 par 10. Le reste de cette division euclidienne est nul (égal à 0).

Ainsi, 38 940 est divisible par 10.

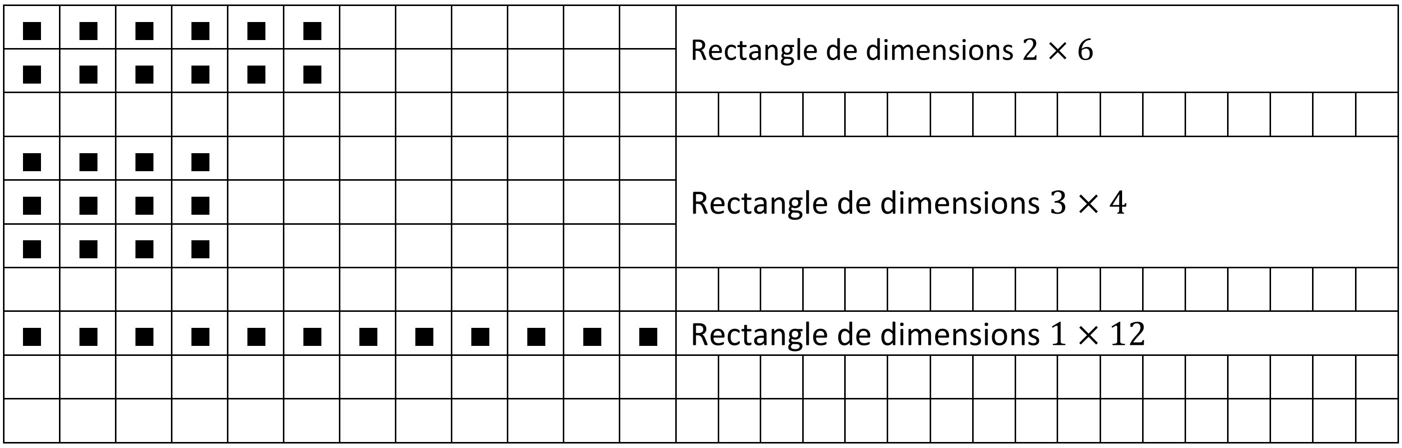
On remarque que l'on aurait pu prendre n'importe quel nombre entier se terminant par 0 et effectuer le même raisonnement.

II. Décomposition d'un nombre en un produit de facteurs premiers

Activité n°2 (Inspirée *Irem de Lyon)*

On dispose de jetons carrés. Le but est de former le plus possible de rectangles avec un certain nombre de jetons.

Exemple : Voici tous les rectangles que l'on peut former avec 12 jetons.



1. Former le plus possible de rectangles sur la grille suivante avec 18 jetons. Même question avec 25 jetons puis 17 jetons

2. Donne tous les diviseurs du nombre 18 ? 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18.
3. Donne tous les diviseurs du nombre 25 ? 1 ; 5 ; 25.
4. **a.** Que remarques-tu pour le nombre 17 ? Avec 17 jetons, on ne peut former qu'un seul rectangle (1 ligne).
   b. Donne tous les diviseurs du nombre 17 ? 1 et 17.

Bilan

Vocabulaire : Lorsqu'on écrit un nombre comme un produit de deux nombres, on dit qu'on a *décomposé le nombre en un produit de facteurs.*

Définition : Un nombre premier est un nombre qui a exactement 2 diviseurs (1 et lui-même).

Remarque : À partir d'un nombre premier, on ne peut former qu'un seul rectangle de dimensions le nombre 1 et le nombre premier.

Exemples : Les nombres suivants sont-ils premiers ?

- 17 ? 17 est premier car il a exactement 2 diviseurs : 1 et 17.
- 25 ? 25 n'est pas premier car il a 3 diviseurs et non 2 : 1 ; 5 et 25.
- 5 ? 5 est premier car il a 2 diviseurs : 1 et 5.
- 1 ? 1 n'est pas premier car il n'a qu'un diviseur : lui-même.
- 29 ? 29 est premier car il a exactement 2 diviseurs : 1 et 29.

Activité n°3 (Inspirée *Ermel)*

Règles du jeu expliquées sur un exemple :

24	On écrit le nombre entier de départ.
3×8	On écrit un produit de deux facteurs.
$3 \times 2 \times 4$	On écrit un produit de trois facteurs en gardant un facteur de la 1re ligne.
$3 \times 2 \times 2 \times 2$	On continue en ajoutant un facteur à chaque ligne jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.
$6 \times 2 \times 2$	On enlève un facteur à chaque ligne sans réécrire une décomposition déjà écrite.
12×2	…
24	Jusqu'à retourner au nombre de départ.

a. Applique les règles du jeu au nombre 48.
b. Applique les règles du jeu aux nombres 30 ; 72 et 13.

Bilan

On peut décomposer un nombre en un produit de plus de deux facteurs.
Exemple : $48 = 3 \times 8 \times 2$.

Remarque : On peut aussi écrire $48 = 8 \times 2 \times 3$. L'ordre des facteurs ne changent pas le produit.

La décomposition en un produit de facteurs la plus longue (sans facteur égal à 1) n'est composée que de nombres premiers.
$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ est la décomposition la plus longue du nombre 48. Il n'y a que des nombres premiers : 3 et 2.

Théorème (admis) : Tout nombre entier se décompose de manière unique en un produit de facteurs premiers.

Ce théorème a été démontré par Carl Friedrich Gauss au 19e siècle. Gauss était considéré par ses pairs comme le prince des mathématiciens. C'est aussi Gauss qui, à 9 ans, aurait donné instantanément la réponse à son instituteur qui lui demandait de calculer la somme $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ (poignées de mains).

Exemples : Trouver la décomposition en un produit de facteurs premiers de 50 ; 21 ; 105.

$50 = 2 \times 5 \times 5$ $\qquad$ $21 = 3 \times 7$ $\qquad$ $105 = 5 \times 3 \times 7$

Questions supplémentaire à l'activité n°3

- Trouver toutes les décompositions possibles qui pourraient être à la ligne suivante de $3 \times 15 \times 4 \times 10$.
- Voici deux décompositions : $14 \times 11 \times 5$ et 20×77. Sans calculer le nombre de départ, peut-on savoir si ce sont deux décompositions du même nombre ? Explique.