Chapitre n°6 : Proportionnalité et ratio www.mathscours.com

Objectifs	NE	MI	CA	MS	TM
Je sais déterminer si un tableau est un tableau de proportionnalité avec l'égalité des produits en croix.					
Je sais trouver et utiliser un coefficient de proportionnalité.					
Je sais reconnaître une situation de proportionnalité graphiquement.					
Je sais utiliser un ratio.					

I. Situation de proportionnalité et coefficient de proportionnalité

Il existe plusieurs procédures pour rechercher une quatrième proportionnelle. On nomme quatrième proportionnelle le nombre que l'on recherche quand on en connaît déjà 3. Il s'agit de choisir la procédure la plus efficace.

Vocabulaire : Une situation où l'on étudie deux grandeurs (prix, masse…) est dite de proportionnalité lorsqu'on obtient les valeurs prises par une grandeur en multipliant par un même nombre les valeurs prises par l'autre grandeur. Ce nombre est appelé le coefficient de proportionnalité.

Exemples : *Proportionnalité or not* ?

Situation n°1

1kg de pommes coûte 3,50€. Pour 6kg de pommes, on paie 21€. Y a-t-il proportionnalité entre le nombre de pommes et le prix des pommes ?

$$\frac{3{,}5}{1} = 3{,}5 \text{ et } \frac{21}{6} = 3{,}5$$

$\frac{3{,}5}{1} = \frac{21}{6}$, donc le nombre de pommes est proportionnel à leur prix.

Situation n°2

2 tickets de métro parisien coûtent 4,40€. Achetés par 10, les 10 tickets de métro coûtent 16,90€. Y a-t-il proportionnalité entre le nombre de tickets et le prix ?

$$\frac{4{,}40}{2} = 2{,}20 \text{ et } \frac{16{,}90}{10} = 1{,}69$$

$\frac{4{,}40}{2} \neq \frac{16{,}90}{10}$, donc le nombre de tickets de métro n'est pas proportionnel à leur prix.

Rappel : Méthode : Un tableau est-il un tableau de proportionnalité ?

Exercice : On relève la masse de sel dans des échantillons d'eau de mer. Est-ce un tableau de proportionnalité ?

Volume d'eau en L	1,5	4	7
Masse de sel en kg	48	128	224

Étape n°1 : Calcul des quotients : $\frac{masse\ de\ sel}{volume\ d'eau}$ (colonne par colonne).

$$\frac{48}{1{,}5} = 32 \ ; \ \frac{128}{4} = 32 \ ; \ \frac{224}{7} = 32$$

Étape n°2 : Comparaison des quotients et conclusion.

- Si les quotients sont égaux, alors ce nombre est le coefficient de proportionnalité et le tableau est un tableau de proportionnalité.
- Si les quotients sont différents, alors il n'y a pas de coefficient de proportionnalité donc pas de situation de proportionnalité.

Les 3 quotients sont égaux, donc le tableau est un tableau de proportionnalité.

Méthode : Trouver et utiliser un coefficient de proportionnalité

Exercice : Le prix en € de cerises est proportionnel à leur masse, en kg. Calcule le prix manquant dans le tableau ci-contre.

Masse en kg	4	6
Prix en €	11,20	x

Étape n°1 : Calcul d'un coefficient de proportionnalité.

$\frac{11{,}2}{4} = 2{,}8$ est le coefficient de proportionnalité.

Étape n°2 : Calcul de la quatrième proportionnelle.

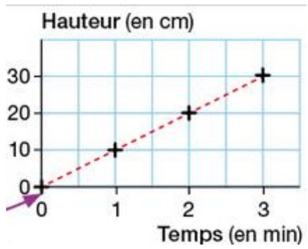
$x = 6 \times 2{,}8 = 13{,}6.$ Le prix pour 6kg est 13,60€.

II. Proportionnalité et graphique

Propriétés (admises)

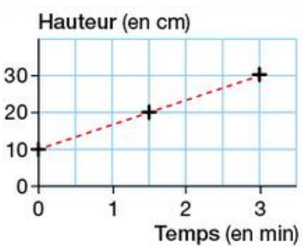
- Dans un repère, toute situation de proportionnalité se représente graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère.
- Dans un repère, tout graphique dont les points sont alignés avec l'origine du repère, représente une situation de proportionnalité.

Exemple n°1

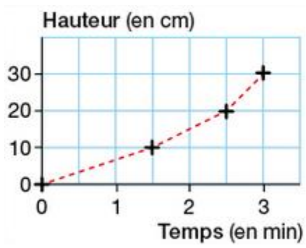


Les points sont alignés avec l'origine du repère, donc ce graphique représente une situation de proportionnalité.

Exemples n°2



Les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère, donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.



Les points ne sont pas alignés, donc ce n'est pas une situation de proportionnalité.

III. Proportionnalité et égalité des produits en croix

Propriété : Le tableau ci-contre représente une situation de proportionnalité.
On peut alors écrire la propriété des produits en croix : $a \times d = b \times c$.

a	c
b	d

Démonstration : Le tableau est un tableau de proportionnalité. Ainsi, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
D'après la propriété des produits en croix, $a \times d = b \times c$.

Méthode : trouver la quatrième proportionnelle, grâce à l'égalité des produits en croix

La masse et la hauteur sont proportionnelles.

Masse en kg	3,6	4,78	y	27,8
Hauteur en cm	x	11,472	13,896	z

Détermine les valeurs de $x, y\ et\ z$ grâce à l'égalité des produits en croix.

Corrigé :

$4{,}78 \times x = 3{,}6 \times 11{,}472$

$4{,}78 \times x = 41{,}2992$

$x = \frac{41{,}2992}{4{,}78}$

$x = 8{,}64$

La hauteur correspondant à 3,6kg est 8,64cm.

$4{,}78 \times 13{,}896 = y \times 11{,}472$

$66{,}42288 = y \times 11{,}472$

$y = \frac{66{,}42288}{11{,}472}$

$y = 5{,}79$

La masse correspondant à 13,896cm est 5,79kg.

$4{,}78 \times z = 27{,}8 \times 11{,}472$

$4{,}78 \times z = 318{,}9216$

$x = \frac{318{,}9216}{4{,}78}$

$x = 66{,}72$

La hauteur correspondant à 3,6kg est 8,64cm.

IV. Ratio

Situation d'introduction

Amin, Béatrice et Carmela se partagent 99 bonbons de manière inégale. Pour 3 bonbons pris par Amin, Béatrice en prend 4 et Carmela 2. Combien de bonbons ont respectivement Amin, Béatrice et Carmela ?

Corrigé : Dans le tableau suivant, chaque colonne donne le un nombre de bonbons à l'issue du énième tour de distribution.

Tour de distribution	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10	n°11
Amin	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33
Béatrice	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
Carmela	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Total	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99

La colonne n°11 indique le nombre de bonbons que possèdent Amin, Béatrice et Carmela à l'issue du dernier tour de distribution.

Ainsi, Amin possède 33 bonbons à l'issue de ce partage inégal ; Béatrice 44 bonbons ; Carmela 22 bonbons.

Bilan

Dans la situation précédente de partage inégal, on dit que les bonbons sont partagés entre Amin, Béatrice et Carmela dans le ratio 3:4:2 (lire « 3 pour 4 pour 2 »).

La quantité de bonbons d'Amin divisé par 3 est égale à la quantité de bonbons de Béatrice divisée par 4 et à la quantité de bonbons de Carmela divisée par 2.

Définition : Les lettres a, b et c désignent n'importent quels nombres.

Trois nombres a, b et c sont dits dans le ratio 3:4:2 si $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{2}$.

Méthode pour résoudre des problèmes de partage inégal rapidement

Résolvons la situation d'introduction d'une autre manière, plus efficace.

1re étape : Commencer par trouver le nombre de tours de distribution

À chaque tour sont distribués 9 bonbons. Il y a donc $\frac{99}{9} = 11 \ tours \ de \ distribution.$

2de étape : Multiplier le nombre de bonbons de chaque individu par le nombre de tours de distribution.

Amin : $3 \ bonbons \times 11 = 33$ bonbons

Béatrice : $4 \ bonbons \times 11 = 44 \ bonbons$

Carmela : $2 \ bonbons \times 11 = 22 \ bonbons$