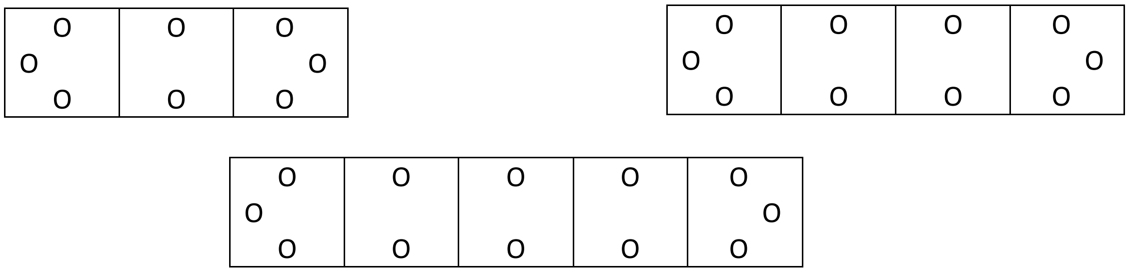
Chapitre n°7 : Calcul littéral www.mathscours.com

Objectifs	NE	MI	CA	MS	TM
Je sais produire une expression littérale à partir d'un programme de calculs ou pour représenter des périmètres, aires et volumes.					
Je sais développer.					
Je sais factoriser et réduire.					
Je sais développer en utilisant la propriété de double-distributivité.					

I. Produire une expression littérale

Situation d'introduction



Des tables sont alignées pour un banquet. Sur chacune des tables, deux assiettes sont disposées, sauf aux extrémités où trois assiettes sont disposées.

1. Combien y a-t-il d'assiettes quand 3 tables sont alignées ? Et pour 4 tables ? Et pour 5 tables ?

Nombre de tables	3	4	5
Nombre d'assiettes	8	10	12

2. Combien y a-t-il d'assiettes quand 10 tables sont alignées ? Et pour 42 tables ?

Nombre de tables	10	42
Nombre d'assiettes	$8 \times 2 + 6 = 22$	$40 \times 2 + 6 = 86$

3. Écris un programme de calcul qui permet de trouver le nombre d'assiettes pour n'importe quel nombre de tables.

1er programme de calcul

Choisis un nombre de tables.
Retire-lui 2.
Multiplie le résultat par 2.
Ajoute 6.

2d programme de calcul

Choisis un nombre de tables.
Multiplie le nombre de tables par 2.
Ajoute 2 au résultat.

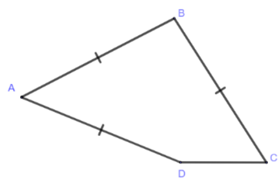
4. Écris l'expression littérale qui correspond au programme de calcul.

La lettre a désigne le nombre de tables choisi au début des programmes de calcul.
1er programme de calcul → $(a - 2) \times 2 + 6$
2d programme de calcul → $a \times 2 + 2$

Bilan

Définition : Une expression littérale est un programme de calcul écris en une seule expression.

Exemples : 1. a. Trouve l'expression littérale du périmètre du quadrilatère ABCD sachant que la lettre x représente AB et que CD=2cm.



$$P = x + x + x + 2 = 3 \times x + 2$$

b. Calcule le périmètre pour $x = 4{,}1cm$ et pour $x = 3{,}8cm$.

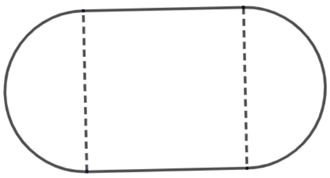
Pour $x = 4{,}1cm,\ P = 3 \times x + 2cm$

$= 3 \times 4{,}1cm + 2cm$
$= 12{,}3cm + 2cm$
$= 14{,}3cm$

Pour $x = 3{,}8cm,\ P = 3 \times x + 2cm$

$= 3 \times 3{,}8cm + 2cm$
$= 11{,}4cm + 2$cm
$= 13{,}4cm$

2. a. Cette figure est un carré collé à deux demi-disques. Trouve l'expression littérale de l'aire de cette figure, en désignant la longueur de côté du carré la lettre c.



$$A_{figure} = A_{carré} + A_{disque}$$
$$= c^2 + \pi \times (\frac{c}{2})^2$$

b. Calcule l'aire de cette figure pour $c = 5m$. Tu donneras la valeur exacte et la valeur approchée au dixième de mètre.

Pour $c = 5m, \quad A_{figure} = c^2 + \pi \times (\frac{c}{2})^2$

$$= 25 + \pi \times 2{,}5^2$$
$$= 25 + \pi \times 6{,}25$$
$$\approx 44{,}6 \text{ m}^2$$

II. Propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition

Propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition : Les lettres k, a et b désignent n'importent quels nombres relatifs.

$$\boldsymbol{k} \times (a + b) = \boldsymbol{k} \times a + \boldsymbol{k} \times b$$

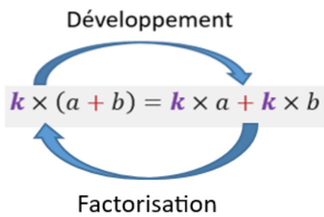
Remarque : Cette propriété transforme un produit en une somme, et réciproquement.

$$\textbf{Produit} \text{ de } \boldsymbol{k} \text{ par la somme de } a \text{ et de } b = \textbf{Somme} \text{ du produit de } \boldsymbol{k} \text{ par } a \text{ et du produit de } \boldsymbol{k} \text{ par } b$$

Dans le 2[d] membre de l'égalité, $\boldsymbol{k}$ est **un facteur commun** aux deux termes : $\boldsymbol{k} \times a$ et $\boldsymbol{k} \times b$.

Vocabulaire

- **Développer** signifie utiliser la propriété de distributivité pour transformer un produit en une somme.
- **Factoriser** signifie utiliser la propriété de distributivité pour transformer une somme en un produit.



Exemples : Développe les expressions suivantes.

$A = \boldsymbol{3} \times (x + 2)$

$= \boldsymbol{3} \times x + \boldsymbol{3} \times 2$

$= 3 \times x + 6$

$B = (3 + y) \times \boldsymbol{y}$

$= 3 \times \boldsymbol{y} + y \times \boldsymbol{y}$

$= 3 \times y + y^2$

$C = \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{t} \times (4 - t)$

$= \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{t} \times 4 - \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{t} \times t$

$= 8 \times t - 2 \times t^2$

Méthode : Factoriser une expression

$D = 3 \times t - y \times 3$ ← J'identifie les 2 termes : $3 \times t$ et $y \times 3$. Puis je repère le facteur commun aux 2 termes : 3.

$= \boldsymbol{3} \times (t - y)$ ← J'applique la propriété de distributivité avec $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{3}$; $a = t$ et $b = -y$.

$E = 4 \times x^2 + x^2 \times 2{,}5$ ← J'identifie les 2 termes : $4 \times x^2$ et $x^2 \times 2{,}5$. Je repère le facteur commun aux 2 termes : $\boldsymbol{x^2}$.

$= \boldsymbol{x^2} \times (4 + 2{,}5)$ ← J'applique la propriété de distributivité avec $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{x^2}$; $a = 4$ et $b = 2{,}5$.

$= 6{,}5 \times x^2$ ← Je calcule ce que je peux calculer.

$F = 6 \times x + 3$ ← J'identifie les 2 termes : $6 \times x \;\; et \;\; 3$. **En apparence,** il n'y a pas de facteur commun.

$= \mathbf{3} \times 2 \times x + \mathbf{3} \times 1$ ← Je fais apparaître un facteur commun aux 2 termes : **3**.

$= \mathbf{3} \times (2 \times x + 1)$ ← J'applique la propriété de distributivité avec $\boldsymbol{k} = \mathbf{3}$; $a = 2 \times x \; et \; b = 1$.

III. Convention, règles de calcul et réduction d'expressions littérales

Convention : Devant une lettre ou une parenthèse, il est possible de ne pas écrire le signe × quand il y a une multiplication.

Exemples

Supprime les signes × quand c'est possible.

$A = 13 \times x - 2 \times (4x - 3 \times 7) + x \times 5$

$= 13x - 2(4x - 3 \times 7) + 5x$

Ajoute les signes × lorsque c'est possible.

$B = (3x - 2 \times 15)(4z - 3(-7q + 1))$

$= \; (3 \times x - 2 \times 15) \times (4 \times z - 3 \times (-7 \times q + 1))$

Propriété – règle algébrique des signes : Les lettres x et y désignent n'importent quels nombres relatifs.

$$(-x) \times y = x \times (-y) = -xy \qquad (-x) \times (-y) = x \times y = xy$$

Exemples : $(-1) \times x = -1x = -x$ $\qquad (-3) \times x = -3x$ $\qquad (-x) \times (-4) = 4x$

Propriété : Les lettres a, b, c, d et e désignent n'importent quels nombres relatifs.

$$-(a + b - c) = -a - b + c$$

Autrement dit : quand il y a un signe – devant une somme ou une différence, on change le signe devant tous les termes, **(même le premier !).**

Démonstration : $-(a + b - c) = (-1) \times (a + b - c)$

$= (-1) \times a + (-1) \times b - (-1) \times c$ ← J'ai développé l'expression.

$= -a - b - c$ ← J'ai pris l'opposé de chaque terme.

Exemples : $4 - (3 + 2x) = 4 - 3 - 2x$ $\qquad 5x - (7 - 2y - 3x) = 5x - 7 + 2y + 3x$

Vocabulaire : Réduire une expression signifie regrouper en un seul terme, les termes en x², puis les termes en x, puis les termes constants (sans lettre).

Exemple : $3x^2 + 2x - 5 + 3x - x^2 + 7 = 3x^2 - x^2 + 2x + 3x - 5 + 7$

$= 2x^2 + 5x + 2$ ← Expression réduite.

IV. Propriété de double-distributivité

Propriété de double-distributivité de la multiplication sur l'addition

Les lettres a, b, c et d désignent n'importent quels nombres relatifs.

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (c + d) = \boldsymbol{a} \times c + \boldsymbol{a} \times d + \boldsymbol{b} \times c + \boldsymbol{b} \times d$$

Démonstration : $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(c+d)=\boldsymbol{a}\times(c+d) \quad + \quad \boldsymbol{b}\times(c+d)$

$$=\boldsymbol{a}\times c+\boldsymbol{a}\times d \;+\; \boldsymbol{b}\times c+\boldsymbol{b}\times d$$

Pour prouver la propriété de double-distributivité, on utilise la propriété de distributivité simple.

Exemples

$$(3+x)(2+x)=3\times 2+3\times x+x\times 2+x\times x$$
$$=6+3x+2x+x^2$$
$$=x^2+5x+6$$

$$(y+1{,}5)(y-1)=y\times y-y\times 1+1{,}5\times y-1{,}5\times 1$$
$$=y^2-y+1{,}5y-1{,}5$$
$$=y^2+0{,}5y-1{,}5$$